Ne rien inscrire dans ce cadre

Epreuves communes GEIPI-ENI
Mercredi 17 mai 2006

SUJET 4 MATHEMATIQUES

Groupe ENI
Ecoles Nationales d'Ingénieurs
Brest, St Etienne, Metz, Tarbes

NOM	PRENOM
DATE DE NAISSANCE	N° INSCRIPTION

Note :

Le sujet 4 comporte 5 pages numérotées de 1 à 5

EXERCICE I - (3,5 points)

Donner les réponses des questions I-1- et I-2- dans le cadre prévu ci-dessous

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I-1- Montrer que g est impaire.

I-2-a- Montrer que, pour tout réel x, on a :

$$g(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

I-2-b- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$. Justifier la réponse.

REPONSES A L'EXERCICE I

I-1-	g est impaire car pour tout réel x, on a : $g(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{e^{-x} + e^{x}} = -g(x)$
I-2-a-	$g(x) = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ car $g(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \dfrac{e^{x}(1 - e^{-2x})}{e^{x}(1 + e^{-2x})} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$
I-2-b-	$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$ donc $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (1 - e^{-2x}) = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (1 + e^{-2x}) = 1 \end{cases}$

EXERCICE I - (suite)

Donner les réponses aux questions suivantes de l'exercice dans le cadre prévu à la page 3

I-3-a- Déduire de ce qui précède que $\mathcal{C}_g$ admet une droite asymptote $\boldsymbol{\Delta_1}$, au voisinage de $+\infty$, dont on donnera une équation.

I-3-b- En utilisant la question **1-**, déduire que $\mathcal{C}_g$ admet une droite asymptote $\boldsymbol{\Delta_2}$, au voisinage de $-\infty$, dont on donnera une équation.

I-4-a- Montrer que pour tout réel x, on a :

$$g(x) < 1$$

I-4-b- Indiquer alors la position de la courbe $\mathcal{C}_g$ par rapport aux deux asymptotes $\boldsymbol{\Delta_1}$ et $\boldsymbol{\Delta_2}$.

I-5-a- Déterminer $g'(x)$, où g' désigne la dérivée de g.

I-5-b- Donner le tableau des variations de g sur $\mathbb{R}$.

I-6- Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}_0$ à la courbe $\mathcal{C}_g$, au point d'abscisse $\mathbf{0}$.

I-7- Tracer la courbe $\mathcal{C}_g$, les asymptotes $\boldsymbol{\Delta_1}$ et $\boldsymbol{\Delta_2}$ et la tangente $\mathcal{T}_0$.

REPONSES A L'EXERCICE I (suite)

I-3-a- $\boldsymbol{\Delta_1 \; : y = 1}$ car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$	**I-3-b-** $\boldsymbol{\Delta_2 \; : y = -1}$ car $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = -1$

I-4-a- $g(x) < 1$ car $g(x) = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ et pour tout réel x, on a :

$$g(x) - 1 = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} - 1 = \frac{1 - e^{-2x} - 1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = -\frac{2\,e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} < 0$$

I-4-b- $\mathcal{C}_g$ est en dessous de $\boldsymbol{\Delta_1}$ et au dessus de $\boldsymbol{\Delta_2}$.

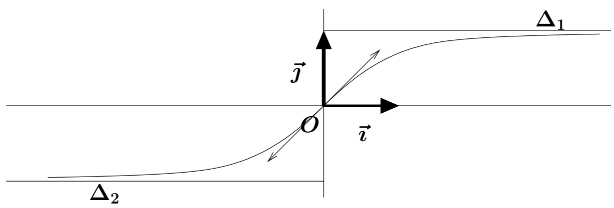
I-5-a- $g'(x) = \dfrac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$.

I-5-b-

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	1	$+$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

I-6- $\mathcal{T}_0 \; : \; y = g'(0)(x - 0) + g(0) \iff \mathcal{T}_0 \; : \; y = x$.

I-7-



NE RIEN ECRIRE DANS LA PARTIE BARREE

EXERCICE II (6,5 points)

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 5

Soit $\mathcal{P}$ le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Partie A

On considère la transformation T_0 qui, à tout point M du plan $\mathcal{P}$, d'affixe z, associe le point M', d'affixe z' défini par :

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{2}\, i\, z + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

II-A-1- Déterminer l'affixe b de l'unique point B invariant par T_0, c'est-à-dire vérifiant : $T_0(B) = B$.

On donnera b sous forme algébrique et on justifiera soigneusement tous les calculs.

II-A-2- On suppose que M est différent de B et on pose : $Z = \dfrac{z' - b}{z - b}$.

II-A–2-a- Déterminer le réel R tel que $Z = i\,R$. Donner le détail des calculs.

II-A-2-b- Déterminer un argument $Arg\,Z$ et le module $|\,Z\,|$ de Z.

II-A-2-c- En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'}\right)$ et une expression de la distance BM' en fonction de BM.

Partie B

Soit α un nombre complexe et A_α le point d'affixe α.
On considère la transformation T_α qui, à tout point M du plan, d'affixe z, associe le point M', d'affixe z' défini par :

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(\alpha + i)\,z + \frac{\sqrt{2}}{2}\,(1 - \alpha)$$

II-B-1- On suppose dans cette question que : $\alpha = \sqrt{2} - i$.

II-B-1-a- Déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$.

II-B-1-b- En déduire que $T_{\sqrt{2}-i}$ est une transformation géométrique simple, dont on donnera le(s) élément(s) caractéristique(s).

II-B-2-a- Il existe une valeur α_1 pour laquelle la transformation T_{α_1} est une rotation de centre O. Quelle est cette valeur ?

II-B-2-b- Déterminer alors l'angle θ_1 de la rotation T_{α_1}. Justifier votre réponse.

NE RIEN ECRIRE DANS LA PARTIE BARREE

REPONSES A L'EXERCICE II

II-A-1-	$b = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}\, i$ car $z' = z \iff \frac{\sqrt{2}}{2}\, i\, z + \frac{\sqrt{2}}{2} = z$ $\iff z\,(2 - \sqrt{2}\, i) = \sqrt{2}$ $\iff z = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}\, i} = \frac{\sqrt{2}\,(2 + \sqrt{2}\, i)}{4+2} = \frac{\sqrt{2} + i}{3}$
II-A-2-a-	$R = \frac{\sqrt{2}}{2}$ car comme b vérifie $b' = b$, alors $b = \frac{\sqrt{2}}{2}\, i\, b + \frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où : $Z = \frac{z' - b}{z - b} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\, i\, z + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\, i\, b + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{z - b} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\, i\,(z - b)}{z - b} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, i$
II-A-2-b-	$Arg\, Z = \frac{\pi}{2} \quad (2\,\pi)$ $\quad\quad \mid Z \mid = \frac{\sqrt{2}}{2}$
II-A-2-c-	$\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'}\right) = Arg\, Z = \frac{\pi}{2} \quad (2\,\pi)$ $\quad BM' = \frac{\sqrt{2}}{2}\, BM$ car $\mid Z \mid = \frac{BM'}{BM}$
II-B-1-a-	Affixe de $\overrightarrow{MM'}$: $z' - z = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}\, z + \frac{\sqrt{2}}{2}\,(1 - \sqrt{2} + i) - z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \sqrt{2} + i\right)$
II-B-1-b-	$T_{\sqrt{2} - i}$ est la translation de vecteur, le vecteur d'affixe $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \sqrt{2} + i\right)$, car pour tout point M du plan, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est constant, puisque d'affixe constante.
II-B-2-a-	$\alpha_1 = 1$
II-B-2-b-	$\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ car $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(1 + i) = e^{i\,\frac{\pi}{4}}\, z$