EXERCICE I- (4 points)

Donner les réponses à cet exercice dans les cadres prévus

On se place dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}; \vec{v})$
(unité graphique : 2 cm)
La figure sera complétée au fur et à mesure que l'énoncé le demandera.

I-1. Résoudre dans l''ensemble des nombres complexes l'équation :

$$Z^2 - 2Z + 4 = 0.$$

Solution **I-1**

le discriminant est: $\Delta = 4 - 16 = -12$ donc l'équation admet 2 solutions complexes:
$z_A = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_B = 1 - i\sqrt{3}$

I-2. Soient les points A et B d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + i\sqrt{3} \text{ et } z_B = 1 - i\sqrt{3}.$$

a- Calculer le module et un argument du nombre complexe z_A.

Solution **I-2-a**

$|z_A| = 2$ et: $arg\ z_A = \dfrac{\pi}{3}$

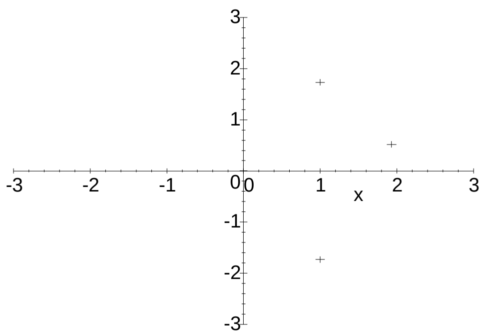
b- En déduire le module et un argument du nombre complexes z_B.

Solution **I-2-b**

$|z_B| = 2$ et: $arg\ z_B = -\dfrac{\pi}{3}$

c- Placer les points A et B sur la figure.

Solution **I-2-c**



d- Démontrer que le triangle OAB est un triangle isocèle.

Solution **I-2-d**

$$\boxed{|z_A| = |z_B| \quad \text{donc:} \qquad OA = OB}$$

I-3. Soit C le point d'affixe z_C défini par :

$$z_c = e^{-i\frac{\pi}{4}} z_{A.}$$

a- Déterminer l'écriture algébrique de z_C.

Solution **I-3-a**

$$\boxed{z_c = e^{-i\frac{\pi}{4}} z_{A.} = (\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})(1 + i\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6} + i\left(\frac{1}{2}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)}$$

b- Calculer le module et un argument du nombre complexe z_C.

Solution **I-3-b**

$$\boxed{|z_c| = |e^{-i\frac{\pi}{4}}| \times |z_{A.}| = 1 \times 2 = 2 \qquad \text{et:} \qquad arg\ z_C = \arg(e^{-i\frac{\pi}{4}} z_{A.}) = \arg(e^{-i\frac{\pi}{4}}) + \arg(z_{A.}) = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}}$$

c- Placer le point C sur la figure.

Solution**I-3-c** voir dans le cadre **I-2-c**

d- Quelle est la transformation du plan transformant A en C ? Justifier votre réponse.

Solution **I-3-d**

La relation: $z_c = e^{-i\frac{\pi}{4}} z_{A.}$ permet de dire que C est l'image de A par la rotation de centre O d'an

e- Déduire des questions **a)** et **b)** le calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Solution **I-3-e**

on a donc: $z_c = 2(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)) = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6} + i\left(\frac{1}{2}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

donc: $2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6}$ et: $2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$

d'où: $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{6}$ et: $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$

EXERCICE II- (3 points)

Donner les réponses à cet exercice dans les cadres prévus.

Dans un magasin d'informatique, on propose aux clients des ordinateurs avec comme options possibles l'écran et un abonnement internet,

Partie I :

On considère un échantillon de 400 clients et le tableau suivant donnant la répartition des choix de ces clients:

	Avec écran	Sans écran	total
Avec abonnement	80	160	240
Sans abonnement	80	80	160
total	160	240	400

II-1. On choisit au hasard un client dans cet échantillon et on admet que les tirages sont équiprobables.

a- Déterminer la probabilité que ce client ait acheté un ordinateur avec écran et avec abonnement internet.

Solution **II-1-a**

$\boxed{80/400=0.20}$

b- Déterminer la probabilité que ce client ait acheté un ordinateur avec écran.

Solution **II-1-b**

$\boxed{160/400=0.40}$

Partie II :

Un ordinateur est vendu 400 euros, un écran 150 euros et un abonnement internet 200 euros.

On suppose que la répartition des clients est identique à celle du tableau.

Soit X la variable aléatoire qui, pour chaque ordinateur vendu prélevé au hasard associe le prix global de l'ordinateur avec ses options.

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x	400	550	600	750
$P(X=x)$	.....	.....	.....	.....

II-2. Compléter le tableau précédent.

Solution **II-2**

x	400	550	600	750
$P(X=x)$	0.20	0.20	0.40	0.20

II-3.Calculer l'espérance mathématique de X. En déduire le prix moyen d'un ordinateur.

Solution **II-3**

E(X)=$0.20 \times 400 + 0.20 \times 550 + 0.40 \times 600 + 0.20 \times 750 = 580$
donc le prix moyen d'un ordinateur est de 580 euros.

EXERCICE III - (8 points)

Donner les réponses à cet exercice dans les cadres prévus.

On considère les fonctions f et g, définies sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(x) = x + xe^x \qquad \text{et} \qquad g(x) = 1 + (x+1)e^x$$

Partie A :

III-1-a- Déterminer la dérivée g' de la fonction g.

Solution **III-1-a**

$$\boxed{g'(x) = (1 + (x+1)e^x)' = 0 + e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x}$$

b- Étudier le signe de $g\prime(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.

Solution **III-1-b**

Le signe de $g\prime(x)$ est celui de $(x+2)e^x$ donc de $(x+2)$ donc:
$g\prime(x) \geq 0$ si $x \geq -2$

$g\prime(x) \leq 0$ si $x \leq -2$

III-2- Déduire des questions précédentes le tableau de variations complet de la fonction g.

Solution **III-2**

on en déduit le tableau suivant:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g\prime(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0.865	$\nearrow$	

III-3-A l'aide du tableau de variations de la fonction g, donner le tableau de signes de la fonction g sur $211d$.

Indication : on utilisera la valeur numérique : $1 - e^{-2} \approx 0,865$

Solution **III-3**

Le tableau de variations de g permet de conclure que g(x) est positif pour tout réel x.

Partie B :

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})$ (unités : 2 cm en abscisse, 1 cm en ordonnée).

III-4-Montrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à C en $-\infty$.

Solution **III-4**

$$\boxed{\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) - x = \lim_{x \mapsto -\infty} xe^x = 0}$$

III-5-Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Solution **III-5**

$$\boxed{\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim_{x \mapsto +\infty} x + xe^x = +\infty \quad \text{car:} \quad \lim_{x \mapsto +\infty} xe^x = +\infty}$$

III-6-Déterminer l' abscisse du point d'intersection de la courbe C avec l'axe des abscisses.

Solution **III-6**

On résout: $f(x) = 0$ ou: $(x+1)e^x = 0$
qui donne comme solution: $x = -1$

III-7-Déterminer une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

Solution **III-7**

L'équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0 est donnée par:
$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 2x$

Partie C :
III-8-a- Déterminer la dérivée f' de la fonction f.

Solution **III-8-a**

$\boxed{f'(x) = (x + xe^x)' = 1 + e^x + xe^x = 1 + (1 + x)e^x = g(x)}$

III-8-b-Étudier le signe de $f\prime(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x en utilisant les résultats de la partie A.

Solution **III-8-b**

$\boxed{\text{on a montré que g est positive sur } \mathbf{R} \text{ donc f' est positive sur } \mathbf{R}.}$

III-9-Déduire des questions précédentes le tableau de variations complet de la fonction f.

Solution **III-9**

x	$-\infty$		$+\infty$
$g\prime(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

III-10-Tracer la droite D puis la courbe C, pour x appartenant à l'intervalle $[-4; 2]$, dans le repère défini en début de problème.

Indication : on utilisera les valeurs numériques: $e^{-4} \approx 0,018$ $e^{-2} \approx 0,135$ $e^{-1} \approx 0,368$ $e^2 \approx 7,39$

Solution **III-10**

EXERCICE IV - (5 points)

Donner les réponses à cet exercice dans les cadres prévus.

On considère la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln(1+x)$$

Partie A :

IV-1-a- Déterminer la dérivée f' de la fonction f.

Solution **IV-1-a**

$$\boxed{f'(x) = (x - \ln(1+x))' = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}}$$

IV-1-b- Étudier le signe de $f\prime(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.

Solution **IV-1-b**

x	-1		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$1+x$		$+$		$+$	
$f\prime(x) = \frac{x}{1+x}$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

IV-2-Déduire des questions précédentes le tableau de variations de la fonction f.

Solution **IV-2**

x	-1		0		$+\infty$
$f\prime(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

IV-3-A l'aide du tableau de variations de la fonction f, donner le tableau de signes de la fonction f sur $]-1;+\infty[$.

Solution **IV-3**

Le tableau de variations de f permet de conclure que f(x) est positif pour x>1.

IV-4-Déduire des questions précédentes que sur $]-1;+\infty[$:

$$x \geq \ln(1+x)$$

Solution **IV-4**

On a pour x>1:	$f(x) > 0$	donc:	$x - \ln(1+x)$	et donc:	$x \geq \ln(1+x)$

Partie B :

IV-5- On considère la fonction: $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + x - (1+x)\ln(1+x)$. Montrer que F est une primitive de f sur $]-1;+\infty[$.

Solution **IV-5**

On a: $F'(x) = (\dfrac{x^2}{2} + x - (1+x)\ln(1+x))' = x + 1 - \ln(1+x) - (1+x) \times \dfrac{1}{1+x} = x - \ln(1+x)$

IV-6-Déterminer l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = e - 1$.

Solution **IV-6**

L'aire est donnée par l'intégrale: $\int\limits_0^{e-1} f(x)dx = \int\limits_0^{e-1} (x - \ln(1+x))dx = [F(x)]_0^{e-1} = \frac{1}{2}e^2 - e - \frac{1}{2}$